

Анциферов А.В.

Государственное
высшее учебное
заведение
«Национальный
горный
университет»

УДК 531.3

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ
ВЕРТИКАЛЬНОЙ
ВИБРАЦИОННОЙ МЕЛЬНИЦЫ
КАК ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ*Порівняно вирази для визначення параметрів руху віброударної системи точним та наближеним методами.**The comparison of expressions for the motion parameters of a vibro-impact system determination by the exact and the approximate methods.*

Постановка задачи. Проектирование вертикальных вибрационных мельниц (МВВ) проводится на основании динамического расчета, в котором данную систему рассматривают как двухмассную вибрационную [1]. Но основным достоинством их является возможность реализации виброударного режима измельчения, что попутно с диспергированием материала позволяет проводить его активацию. Поэтому для выбора и обоснования рациональных технологических параметров работы необходимо провести дополнительное исследование взаимодействия рабочего органа и загрузки как виброударной системы. Особенность данного подхода состоит в том, что кроме амплитуды и частоты колебаний рабочего органа МВВ надо учитывать зазор Δ между крышкой помольной камеры и верхним слоем технологической загрузки (помольные тела, обычно стальные шары). Важное значение приобретает учет этой особенности при соизмеримости масс системы камера – технологическая загрузка, что имеет место в МВВ.

Целью статьи является определение технологических параметров работы МВВ точным и приближенным способами и сравнение результатов для дальнейшего развития данного метода с учетом большего числа учитываемых параметров.

1. Точное решение. Рассмотрим относительно простую систему, в которой загрузка рассматривается как единичная масса, взаимодействующая только с дном камеры. Динамическая модель мельницы показана на рис. 1. На массу помольной камеры m_1 действует гармоническое усилие, создаваемое самобалансным эксцентриковым вибровозбудителем. Удар загрузки о дно считаем абсолютно неупругим.

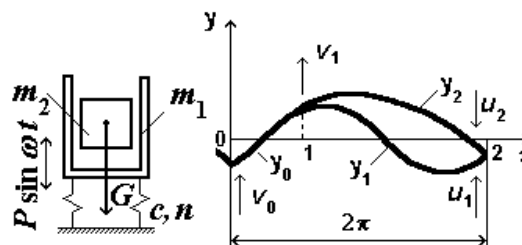


Рис. 1. Динамическая модель и расчетная схема

Исследуем граничный случай, когда отсутствует участок совместного движения элементов системы. В этом случае технологическая загрузка m_2 движется в режиме непрерывного подбрасывания. Временем ударного взаимодействия пренебрегаем. Движение камеры и загрузки описываются уравнениями

$$(m_0 + m_1)\ddot{y}_1^* + 2n\dot{y}_1^* + cy_1^* = m_0 r \omega^2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\ddot{y}_2^* = -g,$$

где φ – фазовый сдвиг внешней силы по отношению к началу отсчета времени,

m_0 – масса инерционного привода,

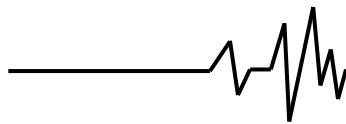
r – его эксцентриситет.

Запишем дифференциальные уравнения движения элементов системы между соударениями в безразмерном виде

$$\ddot{y}_1 + 2\alpha\zeta\dot{y}_1 + \zeta^2 y_1 = \sin(\tau + \varphi), \quad (1)$$

$$\ddot{y}_2 = -\zeta^2 P, \quad (2)$$

где $y_i^* = y_i \frac{m_0 r}{m_0 + m_1}$ ($i = 1, 2$),



$$\omega_0 = \frac{c}{m_0 + m_1}, \quad \zeta = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad P = \frac{(m_0 + m_1)g}{m_0 r \omega_0^2},$$

$$\alpha = \frac{n}{(m_0 + m_1)\omega_0}, \quad \tau = \omega t, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}.$$

Решения уравнений (1) и (2) имеют вид

$$y_1 = \exp(-\alpha\zeta\tau)(C_1 \sin \zeta\tau + C_2 \cos \zeta\tau) + q^{-1} \sin(\tau + \varphi_0), \quad (3)$$

$$y_2 = -\zeta^2 P \frac{\tau^2}{2} + C_3\tau + C_4, \quad (4)$$

где $q = \sqrt{(\zeta^2 - 1)^2 + 4\alpha^2\zeta^2}$, $\varphi_0 = \varphi - \varepsilon$,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 2\alpha\zeta / (\zeta^2 - 1).$$

Движения элементов системы подчинены следующим условиям периодичности

$$y_1(0) = y_1(2\pi), \quad y_2(0) = y_2(2\pi), \quad (5)$$

$$y_1(0) = y_2(0), \quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = -\dot{y}_2(2\pi).$$

Условие абсолютно неупругого соударения масс имеет вид

$$m_1 \dot{y}_1(0) + m_2 \dot{y}_2(0) = m_1 \dot{y}_1(2\pi) + m_2 \dot{y}_2(2\pi).$$

С учетом условия (5) получим

$$(\mu + 2)\dot{y}_1(0) = \mu\dot{y}_1(2\pi), \quad (6)$$

где $\mu = (m_0 + m_1)/m_2$.

После подстановки уравнений (3) и (4) в условия (5) и (6) имеем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2\pi\zeta P}{\mu B} [1 - \exp(-\alpha\beta) \cos \beta], \\ C_2 &= \frac{2\pi\zeta P}{\mu B} \exp(-\alpha\beta) \sin \beta, \\ C_3 &= \pi\zeta^2 P, \quad C_4 = C_2 + q^{-1} \sin \varphi_0, \\ \cos \varphi_0 &= \pi\zeta^2 q K P, \end{aligned} \right\} (7)$$

где $\beta = 2\pi\zeta$,

$$B = \exp(-\alpha\beta) [2 \cos \beta - \exp(-\alpha\beta)] - 1,$$

$$K = 1 - \frac{2}{\mu B} [1 - \exp(-\alpha\beta)(\cos \beta + \alpha \sin \beta)].$$

Режим непрерывного подбрасывания соответствует мгновенному отрыву загрузки от днища камеры в следующий после контакта момент. При выбранной системе отсчета перемещений это означает выполнение условия

$$\ddot{y}_1(0) = -g,$$

или в безразмерном виде

$$\ddot{y}_1(0) = -\zeta^2 P. \quad (8)$$

Подставляя (3) в (8) получим

$$-\zeta^2 (C_2 + 2\alpha C_1) - q^{-1} \sin \varphi_0 = -\zeta^2 P.$$

Заменяя постоянные интегрирования их выражениями из (7) имеем

$$1 - \frac{2\pi\zeta}{\mu B} [e^{-\alpha\beta} (\sin \beta - 2\alpha \cos \beta) + 2\alpha] = \pm \frac{1}{qP} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0}. \quad (9)$$

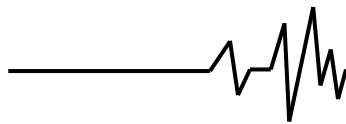
Знак в правой части (9) определяется величиной параметра ζ . Из принятых нами обозначений следует, что к зарезонансной области, в которой работают мельницы с инерционным приводом, относится интервал $\zeta < 1$. Для проведения данного исследования рассмотрим интервал $0 < \zeta < 2$. Учитывая, что параметр P может принимать только положительные значения, из (9) после преобразований получим

$$\frac{1}{P_1} = \frac{\mu}{1 + \mu} \zeta^2 q \sqrt{N^2 + \pi^2 K^2}, \quad (10)$$

где $P_1 = \frac{(m_0 + m_1 + m_2)g}{m_0 r \omega_0^2}$,

$$N = 1 - \frac{\beta}{\mu B} \left[e^{-\alpha\beta} \sin \beta + 2\alpha (1 - e^{-\alpha\beta} \cos \beta) \right].$$

Из равенства (10) определяются значения возмущающего усилия, обеспечивающие взаимодействие камеры и загрузки в режиме непрерывного подбрасывания. Отметим, что данный режим существует и является устойчивым в некоторой области значений параметра P_1 , а не только на линии, определяемой зависимостью (10). Для построения этих границ требуется исследование полученного решения на устойчивость методом припасовывания. В нашем случае мы получили аналитическую зависимость для нижней границы возмущающего усилия P_1 . Для практического применения при определении параметров работы МВВ достаточно знать нижнюю границу величины $1/P_1$, т.к. рабочее значение возбуждающего усилия $m_0 r \omega_0^2$ должно находится ниже. Это вызвано двумя причинами. Во-первых, мы предохраняем себя от технологических несовершенств и возможных разбросов параметров работы электродвигателя и мельницы в целом. Во-вторых, максимальная скорость ударного взаимодействия загрузки и камеры также находится в области работы камеры и загрузки с «прилипанием». Поэтому при инженерной оценке величины возбуждающего усилия



сложный расчет на устойчивость методом припасовывания оказывается излишним.

2. Приближенное решение.

При аналитическом исследовании виброударных систем часто пользуются методом припасовывания. В некоторых простых случаях он позволяет получить точное решение задачи динамики. В то же время для анализа такого рода существенно нелинейных систем разработаны и приближенные методы [2, 3]. Для оценки их эффективности необходимо провести сравнение с известными точными решениями, существующими для определенных практически важных случаев.

Рассмотрим решение данной задачи приближенным методом, предложенным в [3]. Известно, что для вибрационной системы с малым значением коэффициента диссипации отличие ее амплитудно-частотной характеристики от упругой системы имеет место только в области резонанса. Таким образом при построении амплитудно-частотной характеристики изучаемой системы можно воспользоваться более простыми зависимостями, производя в дальнейшем срезку полученной кривой на резонансном уровне.

Покажем, что данное упрощение можно провести и для виброударной системы со слабым демпфированием. Методика упрощения зависимости (10) будет следующей. Строим кривую для системы без демпфирования и затем производим срезку на уровне параметра $1/P_{0r}$, соответствующего системе с демпфированием на резонансной частоте.

При малых рассеяниях энергии уравнение (1) и его решение (3) имеют вид

$$\ddot{y}_1 + \zeta^2 y_1 = \sin(\tau + \varphi),$$

$$y_1 = C_1 \sin \zeta \tau + C_2 \cos \zeta \tau + \frac{1}{\zeta^2 - 1} \sin(\tau + \varphi). \quad (11)$$

Подставляя (4) и (11) в условия (5) и (6) получим выражения для неизвестных

$$C_1 = \frac{-\pi \zeta P}{\mu}, \quad C_2 = \frac{-\pi \zeta P}{\mu \operatorname{tg}(\pi \zeta)}, \quad C_3 = \pi \zeta^2 P,$$

$$C_4 = C_2 + \frac{1}{\zeta^2 - 1} \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{\mu + 1}{\mu} \pi \zeta^2 (\zeta^2 - 1) P.$$

Теперь из условия (8) определяем нижнее значение границы устойчивости

$$\frac{1}{P_0} = \zeta^2 \left| \zeta^2 - 1 \right| \sqrt{\frac{\mu^2}{(\mu + 1)^2} \left(1 + \frac{\pi \zeta}{\mu \operatorname{tg} \pi \zeta} \right)^2 + \pi^2}. \quad (12)$$

Здесь параметр P_0 соответствует параметру P_1 в (10).

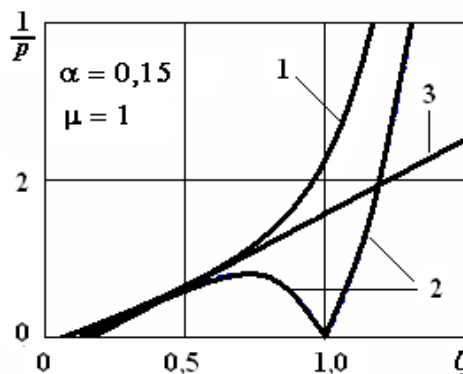


Рис. 2. Зависимости возбуждающего усилия от частоты: 1 – $1/P_1(\zeta)$; 2 – $1/P_0(\zeta)$; 3 – $1/P(\zeta)$

На рис. 2 показаны кривые, построенные по формуле (10) для системы с малым рассеянием энергии (кривая 1) и (12) для случая отсутствия диссипативной силы (кривая 2). Существенное отличие между ними имеет место только в области резонанса. Здесь следует отметить, что справа от ординаты $\zeta = 1$ различие между зависимостями больше, чем слева. Рабочие режимы МВВ с инерционным приводом, для которой предлагается этот метод расчета, являются зарезонансными ($\zeta < 1$).

Определим теперь уровень «срезки» зависимости (12). Если частота внешнего воздействия выше собственной частоты системы то естественно предположить, что инерционный и упругий члены в (1) существенно превышают диссипативную силу и внешнее воздействие. Тогда уравнение (3) можно заменить уравнением свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления

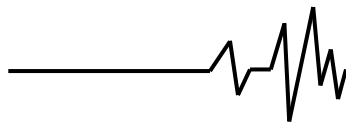
$$\ddot{y}_1 + \zeta^2 y_1 = 0. \quad (13)$$

Отметим еще один важный момент. Т.к. мы рассматриваем двухмассную виброударную систему, то величина внешнего воздействия также зависит от соотношения между массами. Поэтому при достаточно малом значении параметра μ существенно увеличиваются потери энергии при ударе. Данный вывод следует иметь в виду при использовании приближенных методов расчета многомассных виброударных систем [3].

Решение (13) имеет вид

$$y_1 = C_1 \sin \zeta \tau + C_2 \cos \zeta \tau. \quad (14)$$

Для существования таких движений в реальной системе, обладающей диссипативными свойствами, необходимо, чтобы работа сил сопротивления на этих свободных колебаниях не превышала работу внешних сил. Это условие имеет вид



$$|A_d + \Delta W| \leq |A_p| \quad (15)$$

где A_d, A_p – работа диссипативных сил и сил возбуждения соответственно,

ΔW – потери энергии при ударе.

Подчиняя (14) первому условию (5) и условию (8) получаем уравнение

$$y_1 = \frac{P}{\cos \pi \zeta} \cos(\zeta \tau - \pi \zeta).$$

Это решение разлагается в ряд Фурье

$$y_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos i(\tau + \gamma), \quad (16)$$

где $a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y_1(\tau) \sin i \tau d\tau = \frac{2P(\zeta \sin \pi \zeta - i \sin \pi i)}{\pi(\zeta^2 - i^2) \cos \pi \zeta}.$

Теперь величина A_d определится в виде

$$\begin{aligned} A_d &= \int_0^{2\pi} 2\alpha \zeta \dot{y}_1^2 d\tau = \\ &= 2\alpha \zeta \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i i \sin i(\tau + \gamma) \right)^2 d\tau = \\ &= 2\pi \alpha \zeta \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 i^2 \end{aligned}$$

Для упрощения выражений ограничимся рассмотрением потерь по первой гармонике

$$\begin{aligned} A_d &\approx 2\pi \alpha \zeta a_1^2 = 2\pi \alpha \zeta \left(\frac{2\zeta P \operatorname{tg} \pi \zeta}{\pi(\zeta^2 - 1)} \right)^2 = \\ &= \frac{8\alpha \zeta P^2}{\pi(\zeta^2 - 1)^2} \operatorname{tg}^2 \pi \zeta \end{aligned} \quad (17)$$

Так как удар считаем абсолютно неупругим, потери энергии в размерных величинах определяются из выражения

$$\Delta W^* = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} [\dot{y}_1^*(2\pi) - \dot{y}_2^*(2\pi)]^2.$$

В безразмерных величинах данное выражение имеет вид

$$\Delta W = \frac{\zeta^2 k_w}{2(\mu + 1)P^2} [\dot{y}_1(2\pi) - \dot{y}_2(2\pi)]^2,$$

где $k_w = (m_0 + m_1)g^2 / \omega_0^2.$

Введем параметр, характеризующий потерю скорости камеры при взаимодействии с загрузкой

$$\eta = \dot{y}_1(0) / \dot{y}_1(2\pi) \quad (0 < \eta < 1)$$

Из последнего условия (5) следует, что при ударе загрузка сохраняет скорость, изменяя ее знак на противоположный. Одновременно, допущение абсолютно неупругого взаимодействия накладывает

условие равенства скоростей загрузки и камеры сразу после удара. Окончательно, приближенное выражение для безразмерной энергии удара принимает вид

$$\Delta W = \frac{(1 + \eta)^2 \zeta^2 \dot{y}_1^2(2\pi)}{2(\mu + 1)P^2}$$

После подстановки сюда (16) получаем

$$\Delta W = \frac{2(1 + \eta)^2 \zeta^4 \operatorname{tg}^2 \pi \zeta}{(\mu + 1)\pi^2(\zeta^2 - 1)^2} \sin^2 \gamma. \quad (18)$$

Работа внешней силы по гармонике первой частоты

$$\begin{aligned} A_p &= \int_0^{2\pi} \sin(\tau + \varphi) \dot{y}_1(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(\tau + \varphi) a_1 \sin(\tau + \gamma) d\tau \end{aligned}$$

После преобразований получим

$$A_p = \frac{2\zeta P}{(\zeta^2 - 1)} \operatorname{tg} \pi \zeta \cos(\varphi - \gamma). \quad (19)$$

Для определения уровня срезки зависимости (12) подставим (17), (18) и (19) в (15) при частотном параметре $\zeta = 1$, соответствующем резонансу. В этом случае сдвиг по фазе между перемещением и силой $\varphi = \pi/2$. Из (18) также следует, что $\gamma \leq \pi/2$. После раскрытия неопределенностей получим выражение

$$2\pi \alpha P^2 - \pi P + \frac{(1 + \eta)^2}{2(1 + \mu)} \leq 0.$$

Из двух корней уравнения один имеет физический смысл, который соответствует ординате уровня срезки. Через данную точку проводим линию, касательную к левой части кривой (12). Таким образом получаем верхнюю границу параметра возбуждения MBV (рис. 2).

Литература

1. Франчук В.П. Конструкция и динамический расчет вибрационных мельниц // Техника и технология обогащения руд. – М: Недра, 1975. – С. 143-160.
2. Пановко Я.Г. Построение приближенной амплитудной кривой для систем со слабым демпфированием // Вопросы динамики и прочности. – Рига, 1959. – Вып. 6. – С. 54-63.
3. Бабицкий В.И., Коловский М.З. Исследование колебаний линейной системы с ограничителями точными и приближенными методами // Машиноведение. – 1967. – № 4. – С. 14-20.