Остапенко В.А.

Днепропетровский национальный университет» имени О. Гончара

УДК 534.0

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СИНХРОННОГО И СИНФАЗНОГО ВРАЩЕНИЯ ВАЛКОВ И ВИБРАТОРОВ ВАЛКОВЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ ВИБРАЦИОННОГО ТИПА

Одержані необхідні і достатні умови синхронного і синфазного обертання валків і вібраторів валкових класифікаторів вібраційного типу

It is obtained necessary and sufficient conditions for synchronous and in-phase rotation of rollers and vibrators of vibration classifiers.

Введение. Валковые классификаторы в последние годы находят все большее применение в горной, металлургической и строительной промышленности, так как они обеспечивают высокую эффективность классификации материалов [3-4].

С точки зрения обеспечения качественной работы валковых классификаторов вибрационного типа важно обеспечить постоянство зазора между соседними валками. Так как валки не имеют специальных приводов и вращаются исключительно под действием инерционных сил, это значит, что необходимо получить условия, при выполнении которых валки будут вращаться синхронно и синфазно. При нарушении этих условий в процессе вращения зазор между соседними валками будет изменяться. А это приведет к тому, что при различных взаимных расположениях соседних валков просеиваться между ними будут фракции различной крупности.

Постановка проблемы. Расчетная схема классификатора в в процессе работы представлена на рис.1.

На жесткой раме неподвижно закреплены оси валков. На эти оси с зазором надеты цилиндрические полые валки. Центрами осей валков на схеме являются точки O_s. Всего валков n, то есть $s = 1,2,\dots,n$. По обоим концам рамы установлены два дебалансных вибратора, приводимых во вращательное движение асинхронными двигателями. Двигатели вибраторов вращаются в одинаковом направлении против часовой стрелки. Предполагается, что парциальные угловые скорости вращения вибраторов близки к значению ω. Центры вращения вибраторов на схеме обозначены также O_s, $s = n+1, n+2$.

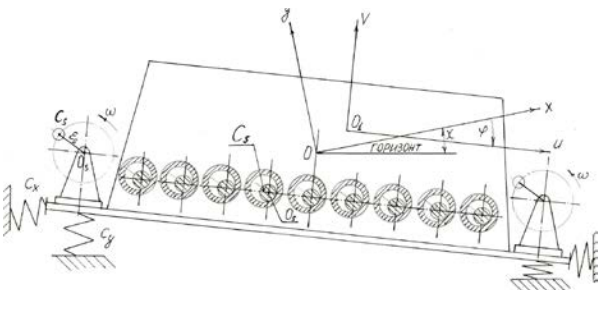

Рис. 1. Схема классификатора в процессе совершения колебаний.

Вводятся две системы координат: неподвижная, xOy, и подвижная, uO_1v, жестко связанная с рамой классификатора. Начало координат расположено в центре масс классификатора в целом в его статическом состоянии. В статическом состоянии обе системы координат совпадают. Начало координат подвижной системы – точка O_1 –

всегда расположена в центре масс классификатора в целом. Масса классификатора в целом обозначена через M. Центр масс жесткой части классификатора расположен в точке C, его координаты в статическом состоянии $x_c = a$; $y_c = b$. Массы валков и дебалансов вибраторов обозначены через m_s, $s = 1,2,\ldots,n+2$. Поэтому масса жесткой части классификатора

$$M_1 = M - \sum_{s=1}^{n+2} m_s \,. \qquad (1)$$

Перемещение точки O_1 относительно неподвижной системы координат описывается функциями $x(t)$ и $y(t)$. Поворот подвижной системы uO_1v относительно неподвижной xOy описывается углом $\varphi(t)$, отсчитываемым от оси x по часовой стрелке. В статическом состоянии продольная ось рамы наклонена к горизонту под углом χ.

Уравнения движения системы. Уравнения движения системы будем получать с помощью уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z_s} - \frac{\partial L}{\partial z_s} = Q_{zs} \,, \qquad (2)$$

где z_s – обобщенные координаты; $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа системы, T, Π – кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно; Q_{zs} – обобщенные силы (моменты), соответствующие обобщенной координате z_s.

Кинетическая энергия массы M_1 определяется по формуле

$$T_{M1} = \frac{M_1}{2}(\dot x_{Oc}^2 + \dot y_{Oc}^2) + \frac{1}{2}J_c\dot\varphi^2 \,, \qquad (3)$$

где $x_c(t)$, $y_c(t)$ – уравнения движения центра масс жесткой части классификатора – точки C; J_C – момент инерции жесткой части классификатора относительно точки C; φ – угол поворота рамы, отсчитываемый относительно оси x неподвижной системы координат xOy по часовой стрелке.

Так как центры вращения вибраторов и центры осей валков – точки O_s – жестко связаны с рамой классификатора, уравнения их движения при малых значениях угла φ будут иметь вид

$$x_{Os}=x_s+u_{Os}+v_{Os}\varphi; \quad y_{Os}=y_s+v_{Os}-u_{Os}\varphi, \qquad (4)$$

где (x_s,y_s) (u_{Os},v_{Os}) – координаты точки O_s относительно систем xOy и uO_1v соответственно, $s = 1,2,\ldots,n+2$.

Так как координаты точки C относительно подвижной системы координат uO_1v постоянны и суть (a,b), из (4) следует, что

$$x_{Oc}=x_c+a+b\varphi \,; \quad y_{Oc}=y_c+b-a\varphi \,, \qquad (5)$$

и, следовательно,

$$T_{M1} = \frac{M_1}{2}[(\dot x_c + b\dot\varphi)^2 + (\dot y_c - a\dot\varphi)^2] + \frac{1}{2}J_c\dot\varphi^2 \,. \qquad (6)$$

Уравнения движения центра масс дебаланса – точки C_s – с учетом (4) будут иметь вид

$$x_{Cs}=x_s + u_{Os} + v_{Os}\,\varphi + \varepsilon_s \cos\varphi_s \,;$$
$$y_{Cs}=y_s+v_{Os}-u_{Os}\varphi+\varepsilon_s\sin\varphi_s, \quad s=n+1,n+2 \,, \qquad (7)$$

где ε_s – радиус вращения центра масс дебаланса, φ_s – угол поворота валка относительно оси x.

Кинетическая энергия каждого из двух дебалансов вибраторов будет равна

$$T_{ds} = \tfrac{1}{2}[m_s(\dot x_{Cs}^2 + \dot y_{Cs}^2) + J_{Cs}\dot\varphi_s^2] \,, \quad s=n+1,n+2 \,, \qquad (8)$$

где m_s – масса дебаланса; J_{Cs} – момент инерции дебаланса относительно точки C_s.

Как показано в [1,2], движение любой точки жесткой части вибратора, в том числе и центра оси валка – точки O_s – происходит по окружности или эллипсу с центром в некоторой точке Ω. Здесь рассматривается вариант движения точки O_s по окружности с центром в точке Ω и радиуса R, изображенный на рис. 2. При таком движении под действием центробежных и кариолисовых сил валок прижимается к оси и осуществляет перекатывание по ней с некоторой угловой скоростью ω_1 [2]. При этом, как показано в [1,2], для преодоления момента, создаваемого весом валка и лежащего на валке материала, относительно точки контакта K валка с его осью, необходимо происходит отставание в перекатывании валка на некоторый угол $\alpha_s(t)$. Поэтому угловая скорость перекатывания валка относительно точки O_s будет равна

$$\omega_{1s} = \dot\psi_s - \dot\alpha_s \,. \quad s = \overline{1,n} \,. \qquad (9)$$

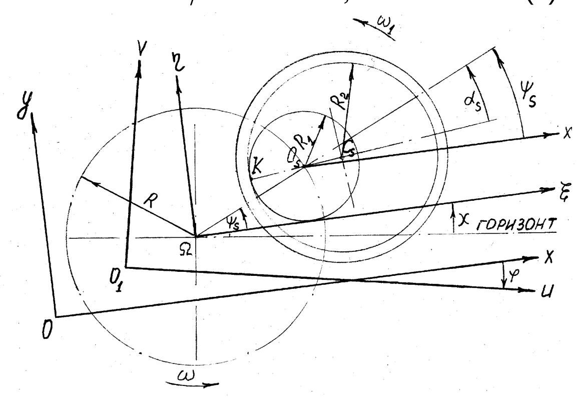

Рис. 2. Схема перекатывания валка.

При этом угол поворота ψ_s всех точек рамы одинаков и в стационарном режиме равен $\psi_s(t) = \psi(t) = \omega t$. Таким образом, кинетическая энергия каждого из n валков будет равна

$$T_{Bs} = \tfrac{1}{2}[m_s(\dot{x}_{Cs}{}^2 + \dot{y}_{Cs}{}^2) + J_{Cs}(\omega - \dot{\alpha}_s)^2]\,,\quad s = \overline{1,n}, \quad (10)$$

где m_s – масса валка; J_{Cs} – момент инерции валка относительно точки C_s; x_{Cs}, y_{Cs} – координаты точки C_s относительно системы координат xOy, определяемые из равенств

$$x_{Cs} = x_{Os} + x_s \ ; \quad y_{Cs} = y_{Os} + y_s \ , \qquad (11)$$

причем x_{Os} и y_{Os} определяются из формул (4), а перемещения точки Cs относительно точки O_s равны

$$x_s = \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s) \ ; \quad y_s = \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_s) \ , \qquad (12)$$

где ε_s – расстояние между точками C_s и O_s.

Учтя, что моменты масс системы относительно точки O_1 равны нулю, так как начало координат подвижной системы uO_1v – точка O_1 – в любом положении системы всегда находится в центре масс этой системы, и обозначив постоянную величину

$$M_1(a^2 + b^2) + J_C + \sum_{s=1}^{n+2} m_s(u_{Os}{}^2 + v_{Os}{}^2) = I\,, \qquad (13)$$

получим, что выражение для полной кинетической энергии системы может быть записано в следующем виде:

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(m_s\varepsilon_s{}^2(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2 + J_{Cs}\dot{\alpha}_s{}^2) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{s=n+1}^{n+2}(m_s\varepsilon_s{}^2\dot{\varphi}_s{}^2 + J_{Cs}\dot{\varphi}_s{}^2) - \dot{x}[\sum_{s=1}^{n} m_s\varepsilon_s(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)\sin(\psi - \alpha_s) +$$
$$+\sum_{s=n+1}^{n+2} m_s\varepsilon_s\dot{\varphi}_s\sin\varphi_s] + \dot{y}[\sum_{s=1}^{n} m_s\varepsilon_s(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)\cos(\psi - \alpha_s) +$$
$$+\sum_{s=n+1}^{n+2} m_s\varepsilon_s\dot{\varphi}_s\cos\varphi_s] -$$
$$-\dot{\varphi}[\sum_{s=1}^{n} m_s\varepsilon_s(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)(u_{Os}\cos(\psi - \alpha_s) + v_{Os}\sin(\psi - \alpha_s)) +$$
$$+\sum_{s=n+1}^{n+2} m_s\varepsilon_s\dot{\varphi}_s(u_{Os}\cos\varphi_s + v_{Os}\sin\varphi_s)] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} J_{Cs}(\omega^2 - 2\omega\dot{\alpha}_s)\,.$$

Потенциальная энергия упругих элементов подвески классификатора определяется выражением

$$\Pi_e = \frac{1}{2}(c_x x^2 + c_y y^2 + c_\varphi \varphi^2) + c_{xy}xy + c_{x\varphi}x\varphi + c_{y\varphi}y\varphi\,,$$

где c с индексами – соответствующие жесткости упругих элементов подвески.

Самая низкая по значению потенциальная энергия валка будет достигнута в таком положении, в котором центр тяжести валка – точка C_s – опустится вниз и разместится на вертикальной прямой O_sC_s. Поэтому относительно этого наименьшего состояния потенциальная энергия валка будет равна

$$\Pi_{Bs} = m_s\, g\, \varepsilon_s (1 + \sin(\psi - \alpha_s + \chi)) \ , \qquad (14)$$

где $s = 1,2,\ldots,n$, g – ускорение силы тяжести.

Аналогично заключаем, что потенциальная энергия дебаланса относительно самого низкого его положения будет равна ($s = n+1, n+2$)

$$\Pi_{ds} = m_s\, g\, \varepsilon_s (1 + \sin(\varphi_s + \chi)) \ , \qquad (15)$$

Таким образом, полная потенциальная энергия системы будет равна

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_x x^2 + c_y y^2 + c_\varphi \varphi^2) + c_{xy}xy + c_{x\varphi}x\varphi +$$
$$+c_{y\varphi}y\varphi + \sum_{s=1}^{n} m_s g\varepsilon_s(1 + \sin(\psi - \alpha_s + \chi)) + \qquad (16)$$
$$+\sum_{s=n+1}^{n+2} m_s g\varepsilon_s(1 + \sin(\varphi_s + \chi))\,.$$

Учитывая полученные выражения для кинетической и потенциальной энергий, за обобщенные координаты естественно принять координаты $x(t)$, $y(t)$ координаты начала координат подвижной системы – точки O_1; угол $\varphi(t)$ поворота подвижной системы координат относительно неподвижной системы; углы $\alpha_s(t)$, $s = 1,2,\ldots,n$, отставания вращения валков от вращения рамы; углы $\varphi_s(t)$, $s = n+1, n+2$, поворота дебалансов вибраторов. Поэтому на основании уравнений Лагранжа 2-го рода (2) и проделанных вычислений получаем следующие уравнения движения системы:

$$M\ddot{x} + \sum_{s=1}^{n} m_s\varepsilon_s[\ddot{\alpha}_s\sin(\psi - \alpha_s) - (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2\cos(\psi - \alpha_s)] -$$
$$-\sum_{s=n+1}^{n+2} m_s\varepsilon_s(\ddot{\varphi}_s\sin\varphi_s + \dot{\varphi}_s{}^2\cos\varphi_s) + c_x x + c_{xy}y + c_{x\varphi}\varphi = Q_x\,;$$
$$M\ddot{y} - \sum_{s=1}^{n} m_s\varepsilon_s[\ddot{\alpha}_s\cos(\psi - \alpha_s) + (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2\sin(\psi - \alpha_s)] +$$
$$+\sum_{s=n+1}^{n+2} m_s\varepsilon_s(\ddot{\varphi}_s\cos\varphi_s - \dot{\varphi}_s{}^2\sin\varphi_s) + c_y y + c_{xy}x + c_{y\varphi}\varphi = Q_y\,;$$
$$I\ddot{\varphi} + \sum_{s=1}^{n} m_s\varepsilon_s r_s[\ddot{\alpha}_s\cos(\psi - \alpha_s - \delta_s) + (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2 \times$$
$$\times\sin(\psi - -\alpha_s - \delta_s)] - \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s\varepsilon_s r_s(\ddot{\varphi}_s\cos(\varphi_s - \delta_s) -$$
$$-\dot{\varphi}_s{}^2\sin(\varphi_s - \delta_s)) + c_\varphi\varphi + c_{x\varphi}x + c_{y\varphi}y = Q_\varphi\,;$$
$$(m_s\varepsilon_s{}^2 + J_{Cs})\ddot{\alpha}_s + \ddot{x}m_s\varepsilon_s\sin(\psi - \alpha_s) - \ddot{y}m_s\varepsilon_s \times$$
$$\times\cos(\psi - \alpha_s) + \ddot{\varphi}m_s\varepsilon_s r_s\sin(\psi - \alpha_s - \delta_s) -$$
$$-m_s g\varepsilon_s\cos(\psi - \alpha_s + \chi) = Q_{\varphi s}\,,\quad s = 1,2,\ldots,n;$$
$$(m_s\varepsilon_s{}^2 + J_{Cs})\ddot{\varphi}_s - \ddot{x}m_s\varepsilon_s\sin\varphi_s + \ddot{y}m_s\varepsilon_s\cos\varphi_s -$$
$$-\ddot{\varphi}m_s\varepsilon_s r_s\cos(\varphi_s - \delta_s) + m_s g\varepsilon_s\cos(\varphi_s + \chi) = Q_{\varphi s}\,, \quad (17)$$
$$s = n+1, n+2\,.$$

Обобщенные силы Q_x и Q_y принимаются вязкими, то есть

$$Q_x = -k_x\dot{x}\ ;\ Q_y = -k_y\dot{y}\ , \qquad (18)$$

где k_x и k_y – коэффициенты вязкого сопротивления упругой подвески классификатора в направлениях x и y соответственно.

Обобщенные силы соответствуют вращательным обобщенным координатам и поэтому представляются в виде моментов:

$$Q_{\varphi s} = L_s - R_s\ . \qquad (19)$$

Здесь L_s и R_s – приведенные к координатам φ_s вращающие моменты двигателей вибраторов и моменты сил сопротивления вращению вибраторов соответственно. Для электродвигателей асинхронного типа на основании их статической характеристики и с учетом того факта, что двигатели установлены на колеблющейся раме, принимается

$$L_s(\dot{\varphi}_s, \dot{\varphi}) = L_s(\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}),\ s=n+1, n+2. \qquad (20)$$

Момент сопротивления вращению ротора вибратора можно представить в виде суммы двух величин [3]:

$$R_s = R_{sA} + R_{sB}\ . \qquad (21)$$

Здесь момент R_{sA} учитывает сопротивления, связанные с присоединением к ротору двигателя дополнительных элементов, таких как крыльчатка вентилятора, масляный насос и другие. Обычно принимают $R_{sA} = R_{sA}(\dot{\varphi}_s)$. R_{sB} – момент сопротивления вращению собственно двигателя и вибратора. Обычно принимают [3]

$$R_{sB}(\dot{\varphi}_s) = \frac{1}{2} f_s m_s d_s \dot{\varphi}_s^2\, sign\, \dot{\varphi}_s\ , \qquad (22)$$

где d_s – диаметр внутреннего кольца подшипника качения; f_s – условный коэффициент трения в подшипнике.

Валки классификатора не имеют двигателей, поэтому для них $L_s = 0$ и $R_s = 0$. Отличным от нуля для валков оказывается только момент сопротивления их перекатыванию по осям, который определяется из соотношения

$$R_{sB} = \frac{1}{2} f'_s d_s N_s\, sign(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s) \qquad (23)$$

Здесь N_s – модуль радиальной составляющей реакции взаимодействия валка и его оси. Для рассматриваемых вибрационных классификаторов величина N_s вычислена в работе [1] и равна

$$N_s = m_s\,[g \sin(\psi - \alpha_s) + R\,\omega^2 \cos\alpha - 2\,\omega\,\dot{\alpha}_s R_2 - R_2\,\dot{\alpha}_s^2], \qquad (24)$$

где R_1 – радиус оси валка; R_2- внутренний радиус валка. Поэтому для валков

$$R_{sB}(\alpha_s, \dot{\alpha}_s) = \frac{1}{2} f'_s d_s\ m_s\,[g \sin(\psi - \alpha_s) + \mathbf{R}\,\omega^2 \cos\alpha - 2\,\omega\,\dot{\alpha}_s R_2 - R_2\,\dot{\alpha}_s^2]\ \mathrm{sign}(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s). \qquad (25)$$

Вращательная обобщенная сила Q_φ также принимается вязкой, однако, учитывая, что все подвижные элементы системы установлены на раме, требуется принять во внимание также реактивные моменты от сил сопротивления движению подвижных элементов с помощью функции $Q_{1\varphi}$, то есть

$$Q_\varphi = -k_\varphi\dot{\varphi} + Q_{1\varphi}\ . \qquad (26)$$

Коэффициенты вязких сопротивлений достаточно малы и поэтому принимаются порядка O(μ) от некоторого малого параметра μ, то есть в виде

$$k_x = \mu k_{1x}\ ;\ \ k_y = \mu k_{1y}\ ;\ \ k_\varphi = \mu k_{1\varphi}\ . \qquad (27)$$

Функция $Q_{1\varphi}$ также рассматривается как малая порядка O(μ) и представляются в виде

$$Q_{1\varphi} = \mu H_\varphi\ . \qquad (28)$$

Далее, так как парциальные угловые скорости вращения вибраторов предполагаются близкими по значению, решение уравнений для углов поворота вибраторов $\varphi_s(t)$ ищется в окрестности функции $\varphi_{s0}(t) = \omega t$. Угол поворота рамы классификатора $\varphi(t)$ также предполагается малым. Более того, малой предполагается скорость изменения угла $\varphi(t)$. Эти соображения позволяют в разложениях моментов L_s, R_{sA} и R_{sB} по формуле Тейлора с достаточной степенью точности ограничиться сохранением только линейных членов.

В связи с тем, что активные моменты приложены только к дебалансам, обобщенный момент для дебалансов будет иметь порядок O(1) и эта часть обобщенных моментов будет представлена в виде

$$Q_{\varphi s} = k_s(\dot{\varphi}_s - \omega) + O(\mu)\ .$$

Учитем, что оси xOy выбраны таким образом, что $c_{xy} = 0$. Таким образом, система уравнений (17) может быть представлена в виде возмущенной системы с малым параметром μ:

$$\begin{gathered}
M\ddot{x} + c_x x + c_{x\varphi}\varphi = P_x(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s) - \mu k_{1x}\dot{x};\\
M\ddot{y} + c_y y + c_{y\varphi}\varphi = P_y(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s) - \mu k_{1y}\dot{y};\\
I\ddot{\varphi} + c_\varphi\varphi + c_{x\varphi}x + c_{y\varphi}y = P_\varphi(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s) +\\
+\mu(-k_{1\varphi}\dot{\varphi} + H_\varphi);\\
J_{Os}\ddot{\alpha}_s + R\omega^2 m_s\varepsilon_s \sin\alpha_s - m_s g\varepsilon_s\cos(\psi - \alpha_s + \chi) =\\
= \mu\Phi_s(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}), \qquad s = \overline{1, n};\\
J_{Os}\ddot{\varphi}_s + k_s(\dot{\varphi}_s - \omega) = \mu\Phi_s(\varphi_s, \ddot{x}, \ddot{y}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}),\\
s = n+1, n+2\ .
\end{gathered} \qquad (29)$$

Здесь слагаемые под знаками сумм в первых трех уравнениях обозначены соответственно – P_x, $-P_y$, $-P_\varphi$. Кроме того

$$J_{Os} = J_{Cs} + m_s\varepsilon_s^2\ ;$$

$$\ddot{x}_p m_s \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_s) - \ddot{y}_p m_s \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s) =$$
$$= R m_s \varepsilon_s \omega^2 \sin \alpha_s .$$

Исследование возмущенной системы. Решение системы (29) отыскивается в виде

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)\,\mu\ ;\ y(t) = y_0(t) + y_1(t)\,\mu\ ;$$
$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\,\mu\ ;$$
$$\alpha_s(t) = \alpha_{s0}(t) + \alpha_{s1}(t)\,\mu\ ,\ s = 1,2,\ldots,n\ ;$$
$$\varphi_s(t) = \varphi_{s0}(t) + \varphi_{s1}(t)\,\mu\ ,\ s = n+1, n+2. \quad (30)$$

Порождающая система для системы (29) будет иметь вид

$$M\ddot{x}_0 + c_x x_0 + c_{x\varphi}\varphi_0 = P_x(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \varphi_{s0}, \dot{\varphi}_{s0}, \ddot{\varphi}_{s0});$$
$$M\ddot{y}_0 + c_y y_0 + c_{y\varphi}\varphi_0 = P_y(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \varphi_{s0}, \dot{\varphi}_{s0}, \ddot{\varphi}_{s0});$$
$$I\ddot{\varphi}_0 + c_\varphi \varphi_0 + c_{x\varphi} x_0 + c_{y\varphi} y_0 =$$
$$= P_\varphi(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \varphi_{s0}, \dot{\varphi}_{s0}, \ddot{\varphi}_{s0});$$
$$J_{Os}\ddot{\alpha}_{s0} + R\omega^2 m_s \varepsilon_s \sin \alpha_{s0} -$$
$$- m_s g \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_{s0} + \chi) = 0, \quad s = \overline{1,n};$$
$$J_{Os}\ddot{\varphi}_{s0} + k_s(\dot{\varphi}_{s0} - \omega) = 0, \quad s = n+1, n+2\ . \quad (31)$$

Решением двух последних уравнений (31), обеспечивающим вращение дебалансов с одинаковой угловой скоростью ω, будут функции

$$\varphi_{s0} = \omega\, t + A_s\ ,\ s = n+1, n+2 \quad (32)$$

с произвольными постоянными A_s. При $A_{n+1} = A_{n+2}$ вращение дебалансов будет также синфазным, по крайней мере, в первом приближении.

Уравнения (31) для α_{s0} исследованы автором ранее [4]. Установлено, что каждое из этих уравнений может быть представлено в виде системы, близкой к системам Ляпунова. Показано, что существуют $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические решения этих уравнений в случаях близких к резонансу, при простом и главном резонансах, причем эти решения могут быть построены так, чтобы в предельном случае обращаться в тривиальное или нетривиальное решения. Исследованы также линеаризованные варианты этих уравнений [5,6]. В этом случае данные уравнения преобразуются к уравнениям типа Хилла или Матье и также допускают периодические решения. Это позволяет утверждать, что $\frac{2\pi}{\omega}$периодические решения уравнений для α_{s0} существуют и в дальнейшем под α_{s0} понимаются именно такие решения.

Подставляя теперь в правые части первых трех уравнений (31) значения φ_s из (32) и $\frac{2\pi}{\omega}$периодические решения уравнений для α_{s0}, получим, что первые три уравнения (31) имеют $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические правые части, то есть будут представлять собой систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами и $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими правыми частями. Поэтому общее решение первых трех уравнений (31) будет представлять собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Соответствующая однородная система имеет решение вида

$$x_0 = h_x e^{i\lambda t}\ ;\ y_0 = h_y e^{i\lambda t}\ ;\ \varphi_0 = h_\varphi e^{i\lambda t}\ . \quad (33)$$

Это решение будет нетривиальным, если выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} c_x - M\lambda^2 & 0 & c_{x\varphi} \\ 0 & c_y - M\lambda^2 & c_{y\varphi} \\ c_{x\varphi} & c_{y\varphi} & c_\varphi - I\lambda^2 \end{vmatrix} = 0\ . \quad (34)$$

Уравнение (34) является кубическим относительно λ^2 и имеет три корня λ^2. Если при этом все три корня λ^2 вещественны и положительны, то следует учесть, что значения квадратного корня из λ^2, взятые со знаком плюс или минус приводят к одинаковым периодическим решениям однородной системы (54). Поэтому в таком случае мы получаем три положительных корня уравнения (34) λ_1, λ_2 и λ_3. В этом случае важно знать, имеет ли хотя бы один из этих корней значение $m\omega + q\mu$, так как этот случай является случаем, близким к резонансному [7], для которого неоднородная система из первых трех уравнений (31) имеет периодическое частное решение лишь при выполнении определенных условий. Эти условия состоят в том, что значения коэффициентов Фурье для всех m-х гармоник при разложении правых частей первых трех уравнений (31) в ряд Фурье должны быть равны нулю, то есть должны выполняться условия

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P_z \sin m\omega t\, dt = 0\ ;\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P_z \cos m\omega t\, dt = 0 \quad (35)$$

для всех трех значений индекса $z = x, y, \varphi$. В нерезонансном случае система из первых трех уравнений (31) всегда допускает единственное $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое решение.

Так как при конструировании вибрационных классификаторов всегда можно добиться выполнения условий (35), можно полагать, что система из первых трех уравнений (31) допускает периодические периода $\frac{2\pi}{\omega}$ решение. В то же время, будучи периодическим, это решение будет устойчивым.

Далее обращаемся к анализу уравнений для α_s и φ_s в системе (29). С этой целью, прежде всего, разлагаем нелинейные члены, а также правые части этих уравнений по формуле Тейлора в окрестности порождающего решения. Для сокращения записей введем следующие обозначения. Выражение (Φ_s) будет означать, что в качестве аргументов этих функций подставлены порождающие решения, то есть

$$(\Phi_s) = \Phi_s(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{\varphi}_0), \quad s = \overline{1, n};$$

$$(\Phi_s) = \Phi_s(\varphi_{s0}, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0), \quad s = n+1, n+2. \quad (36)$$

Такие обозначения распространяются также на производные функций Φ_s.

Подставляя эти разложения и форму решения (30) в уравнения системы (29) для α_s и φ_s и приравнивая в левых и правых частях получившихся равенств коэффициенты при μ, получим следующие уравнения для определения α_{s1} и φ_{s1}:

$$J_{Os}\ddot{\alpha}_{s1} + [R\omega^2 m_s \varepsilon_s \cos\alpha_{s0} - \\ - m_s g \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_{s0} + \chi)]\alpha_{s1} = (\Phi_s), \quad s = \overline{1, n}; \quad (37)$$

$$J_{Os}\ddot{\varphi}_{s1} + k_s\dot{\varphi}_{s1} = (\Phi_s), \quad s = n+1, n+2. \quad (38)$$

Каждое из двух уравнений (38) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической правой частью. Такое уравнение всегда допускает $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое частное решение при условии, что разложение его правой части в ряд Фурье не содержит постоянного слагаемого, то есть выполняется условие

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\Phi_s)dt = 0, \quad s = n+1, n+2.$$

Действительно, решением уравнения $J_{Os}\ddot{\varphi}_{s1} + k_s\dot{\varphi}_{s1} = C$, где C = const, является непериодическая функция $\varphi_{s1} = \frac{Ct}{k_s}$. Поэтому необходимыми и достаточными условиями существования $\frac{2\pi}{\omega}$ периодических решений в системе (38) будут равенства

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\Phi_{n+1})dt = 0; \qquad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\Phi_{n+2})dt = 0. \quad (39)$$

Так как здесь подинтегральные функции зависят от φ_{s0}, представленных в форме (32), из этих уравнений определяются значения постоянных A_{n+1} и A_{n+2}, обеспечивающие $\frac{2\pi}{\omega}$ периодичность функций φ_{s1}. А это и является условием периодического вращения вибраторов с одинаковой угловой скоростью ω, иными словами, их синхронного вращения. Условие синфазного вращения вибраторов состоит в справедливости равенства

$$A_{n+1} = A_{n+2}, \quad (40)$$

выполнение которого можно обеспечить подбором соответствующих параметров классификатора.

Каждое из уравнений системы (37) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими коэффициентами и с $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической правой частью. А это значит, что каждое из уравнений системы (37) представляет собой неоднородное уравнение Хилла [8,9]. Эти уравнения исследованы в [11], где показано, что при определенном подборе параметров системы можно получить периодическое общее решение каждого из уравнений системы (37). А это значит, что вращение всех валков будет осуществляться синхронно с одинаковой частотой.

Следует обратить внимание на то, что, если в уравнениях (31) для α_{s0} величины J_{Os}, m_s, ε_s одинаковы, то есть не зависят от s, то и решение этих уравнений α_{s0} от s не будет зависеть. При этих условиях уравнения (37) для α_{s1} будут отличаться друг от друга только величиной (Φ_s). Величины (Φ_s) являются функциями аргументов $t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{\varphi}_0, r_s, \delta_s$. Все эти аргументы, кроме двух последних, не зависят в рассматриваемом случае от s. Функции Φ_s в явном виде выглядят следующим образом:

$$-(\ddot{x} - \ddot{x}_p)m_s\varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_s) + (\ddot{y} - \ddot{y}_p)m_s\varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s) - \\ -\ddot{\varphi} m_s \varepsilon_s r_s \cos(\psi - \alpha_s - \delta_s) - R_{sB}(\alpha_s, \dot{\alpha}_s) = \\ = \mu\Phi_s(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}), \qquad s = \overline{1, n},$$

где r_s – расстояние между точками O_1 и O_s.

В этих формулах следует обратить внимание на то, что зависимость (Φ_s) от r_s и δ_s является весьма слабой, однако и эту зависимость можно устранить следующим образом. Параметры r_s и δ_s входят только в одно слагаемое в формуле, определяющей функцию Φ_s. Это слагаемое содержит множитель $\ddot{\varphi}$. В функцию (Φ_s) вместо $\ddot{\varphi}$ нужно подставлять значение $\ddot{\varphi}_0$. Если $\ddot{\varphi}_0$ будет равно нулю или, по крайней мере, будет иметь порядок O(μ), то это единственное слагаемое в функции (Φ_s) обратится в нуль, то есть функция (Φ_s) тогда не будет зависеть от r_s и δ_s. В свою очередь, функция $\ddot{\varphi}_0$ может быть равна нулю, если только ее первая производная постоянна. Но, учитывая, что функция φ_0 должна быть периодической, вид этой функции должен быть следующим:

$$\varphi_0 = h + \mu\beta(t), \qquad (41)$$

где $h = const$, а β(t) – произвольная периодическая функция.

Таким образом оказывается, что для того чтобы все уравнения (37) для α_{s1} были одинаковы необходимо (и достаточно), чтобы порождающая система (54) допускала для φ_0 решение вида (41). В этом случае вращения всех валков классификатора будут не только синхронными, но и синфазными.

Заключение. В заключение можно отметить, что получены необходимые и достаточные условия синхронного и синфазного вращения вибраторов и валков вибрационных классификаторов. Условия синхронного вращения вибраторов в нерезонансном случае состоят в выполнении условий (39). В случае, близком к резонансу, дополнительно требуется удовлетворение условий (35). При выполнении условий (40) вращение вибраторов будет также синфазным. Для синхронного вращения валков требуется равенство соответствующих величин J_{Os}, m_s, ε_s. В случае выполнения условия (41) вращение валков будет еще и синфазным. Показано также, что эти вращения будут периодическими, а потому устойчивыми.

Литература

1.Остапенко В.А. Математическая модель свободного качения валков вибрационных классификаторов. // Вестник Херсонского национального технического ун-та. – 2006. – №2 (25). – С. 372–376.

2.Остапенко В.А. Математическая модель движения валков валковых классификаторов вибрационного типа. /В.А. Остапенко, В.П. Надутый, В.Ф. Ягнюков // Вибрации в технике и технологиях. №1 (43) 2006. – С. 97-99.

3.Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. /И.И. Блехман// Наука, М., 1971. – 894 с.

4.Остапенко В.А. Асимптотическое разложение периодического решения порождающего уравнения вращения валков вибрационных классификаторов. /В.А. Остапенко//Вибрации в технике и технологиях №4 (42) 2005, сс. 90–94.

5.Надутый В.П. Синтез параметров валковых классификаторов вибрационного типа. /В.П. Надутый, В.А. Остапенко, В.Ф. Ягнюков// К., Наукова думка, 2006, с. 256.

6.Naduty V.P. Dynamics of periodic rotations of rollers of the vibrating classifiers./V.P. Naduty, V.A. Ostapenko, V.F. Yagnukov// Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2005, pp. 316-323.

7.Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. /Н.Н. Моисеев// Наука, М., 1969 – 379 с.

8.Смирнов В.И. Курс высшей математики./В.И. Смирнов// Т. III, часть вторая, Наука, М., 1969, сс. 672.

9.Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. /Т. Хаяси// Мир, М., 1968. – 432. с.

10.Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. // ГИТТЛ, М., 1952. – 468 с.

11.Остапенко В.А. Периодическое общее решение неоднородного уравнения Хилла. /В.А. Остапенко// Вестник Днепропетровсгого университета, серия Моделирование, вып. 2, №8, т.18, 2010. – С. 103–113.